



University of the Pacific Scholarly Commons

Euler Archive - All Works

Euler Archive

1750

De novo genere oscillationum

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>



Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De novo genere oscillationum" (1750). *Euler Archive - All Works*. 126.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/126>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

DE
NOVO GENERE OSCILLATIONVM.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Quamuis doctrina de oscillationibus corporumque motibus reciprocis iam tanto studio sit pertractata, ut in ea nihil omnino noui proferri posse videatur; tamen in hac dissertatione nouum prorsus genus oscillationum sum prolaturus, quod cum a nemine adhuc tactum est, tum etiam singulari analysi indiget. Primum quidem ansam de eo cogitandi mihi praebeuit Clarissimus Collega Krafft, in dissertatione, quam de insolitis quibusdam oscillationibus horologii portatilis suspensi praelegit; deinde vero etiam, cum aestum maris esse contemplatus, deprehendi istum maris motum reciprocum ad idem oscillationum genus pertinere.

§. 2. Corpus quodcunque oscillationes perficere motus reciproco praeditum esse dicitur, quando vel totum vel eius partes in dato spatio ita perpetuo mouentur, ut eundo et redeundo alternatim in plagas oppositas progrediantur. Hac enim ratione comparatus est motus pendulorum, qui in hac doctrina tanquam casus simplicissimus spectari solet, ad quem omnia reliqua oscillationum genera reuocari conueniat: cuiusmodi sunt vibrationes chordarum, tremores campanarum, undulationes aquarum; atque

atque etiam fluxus et refluxus maris. In quibus omnibus motuum speciebus talis reciprocatio alternaque commutatio secundum plagas oppositas fieri obseruatur.

§. 3. Cum igitur haec proprietas communis sit omni motui oscillatorio, exponam qua in re nouum genus nunc quidem examini subiiciendum a reliquis satis iam agitat^{Tab. I.} discrepet. Sit ergo ACB linea vel curua vel recta id^{Fig. 6. et 7.} spatium representans, in quo corpus vel portio corporis quaecunque motu reciproco feratur, ita vt alternis vicibus modo versus dextram in directione ACB modo versus sinistram in directione BCA promoueat^{ur}. Cum igitur nullum corpus sibi soli relictum et liberum istiusmodi motu reciproco cieri queat, sed vniformiter in directum progredi nitatur, viribus opus est ad motum oscillatorium producendum, in quarum discrimine praecipua diuersitas ipsius motus oscillatorii consistit.

§. 4. Quando autem ad vires attendimus perinde est cuiusnam figurae spatium, in quo fit motus, accipiamus; et propterea hoc spatium commodissime nobis repraesentabitur per lineam rectam ACB. Cum igitur motus al^{Fig. 7.} ternatim versus dextram et sinistram contingat, eiusmodi opus est viribus, quae corpus modo versus dextram modo versus sinistram impellant. Hae ergo vires debent esse maxime variabiles, atque subinde sui negatiuae fieri; vis enim versus sinistram pellens considerari potest instar vis negatiuae versus dextram vrgentis. Quare si fuerit p vis, quae corpus, dum in M versatur, sollicitat, necesse est vt p sic quantitas variabilis, quae non solum pro variis circumstantiis maior minorue fiat, sed etiam in sui negatiuam abeat.

§. 5. Quodsi quantitas huius vis per p solum locum, quem corpus in spatio ACB occupat, determinatur, oscillationes inde ortas ad primum genus refero: in hocque genere continentur omnes oscillationum species etiamnum tractatae, quae quidem in vacuo fieri ponuntur. Pro hoc itaque oscillationum genere vis p exprimetur functione quapiam quantitatis, a qua locus corporis M pender, scilicet functione quadam spatii MC, existente C puncto fixo spatii ACB. Quoties autem istiusmodi oscillationes isochronae deprehenduntur, vis p directe proportionalis est spatio MC; quae si corpus versetur inter A et C, tendit ad dextram, corpore autem inter C et B puta in N existente, sui fit negatiua atque corpus versus finistram vrgebit vi, quae sit vt NC.

§. 6 Ad secundum oscillationum genus refero eas, quae oriuntur a vi p partim a spatio MC partim a celeritate, quam corpus in M habet, pendente, eritque his casibus p functio quaedam cum spatii MC tum etiam celeritatis in M. Ad hoc genus praecipue pertinent eae oscillationes, quae in medio resistente fieri concipiuntur: quia enim resistentia functioni cuidam celeritatis est proportionalis, corpus praeter vim sollicitantem absolutam retardari censendum est a resistentia, quae est vis directioni motus, quam corpus habet, perpetuo contraria. Quomodo autem pro data lege resistentiae vim absolutam comparatam esse oporteat, vt oscillationes fiant isochronae, id in Tractatu meo de motu corporum fusius exposui.

§. 7. Ad tertium denique oscillationum genus eas refero, in quibus corpus praeter vim absolutam a spatio MC pendentem sollicitatur a vi, cuius quantitas determinatur

minatur per tempus, quod a termino quodam fixo est ellapsum, dum corpus in M versatur. Huiusmodi oscillationes a nemine adhuc, quantum scio, ad calculum sunt reuocatae; etiamsi tales oscillationes non parui momenti in mundo fieri quotidie obseruentur. Ad hoc enim genus pertinent oscillationes supra memoratae atque a Clarissimo Professore Krafft primum obseruatae, in quibus vires oscillationes producentes a motu horologii interno atque idcirco a tempore pendent; accedit autem insuper vis absoluta a pondere horologii oriunda, quae distantiae a situ aequilibrii est proportionalis.

§. 8. Manifestum autem est in eodem hoc genere contineri motum maris reciprocum seu alternam eleuationem et depressionem. Praecipua enim vis mare ad hunc motum ciens a loco lunae pendet, qua intervallo duodecim fere horarum alternatim attollitur atque deprimitur: unde haec vis neque a situ aquae neque ab eius celeritate pendet, sed potius a temporis momento. Praeter hanc vero vim mare vrgetur a vi propria grauitatis, qua si supra libellam sit eleuatum, deprimitur, contra vero attollitur, si eius superficies infra libellam versetur. Quocirca si ex effectu harum duarum virium motus maris debeat definiri, ante natura oscillationum ad hoc tertium genus pertinentium inuestigari oportebit.

§. 9. Ponamus igitur oscillationes fieri in spatio ACB , Tab. I corpusque dum in M versatur sollicitari a duplici vi, fig. 7 et 8. quarum altera a loco M pendeat spatioque MC sit proportionalis: ab hac ergo vi corpus, dum in spatio AC existit, vrgetur versus dextram, contra autem, si sit in spatio BC situm, versus sinistram. Altera autem vis pendeat a

tempore, eaque corpus certis momentis versus dextram, certisque aliis momentis versus sinistram impelli, idque sine villo respectu ad corporis locum habito. Exprimamus autem tempus vniformiter fluens per peripheriam circuli FDHE, quippe quae, cum in se ipsam redeat, idonea est ad tempus quantumvis denotandum. Vires porro sint proportionales sinibus arcuum tempora denotantium, vrgeantque eae versus dextram, si sint affirmatiui, contra vero si fiant negatiui versus sinistram.

§. 10. Sit F temporis initium, quo oscillationes inceperunt, fluatque tempus secundum ductum FTDHE. Initio igitur hoc vis corpus sollicitans erit nulla, at post tempus FT corpus versus dextram pelletur vi vt PT; quae vis fiet maxima elapso tempore FD; postmodum iterum decrescet, donec euanescat post tempus FDH. Deinde dum tempus ex H per E in F fluit, vis ista erit negatiua, ac corpus versus sinistram sollicitabit; atque elapso tempore per totam peripheriam expresso, eadem vis sollicitantis redibunt reuolutiones, vnde in corpore proposito motum oscillatorium generari necesse est; idque si hae solae vires agerent: a priori autem vi absoluta a loco corporis pendente iste motus oscillatorius eo magis turbabitur, quo maior quouis momento inter has vires reperietur dissensus.

§. 11. Ponatur circuli FDHE radius $FG = DG = a$; tota circumferentia FDHE $= 4c$ ita vt c quadrantem circuli denotet: atque elapsum iam sit tempus per arcum FT repraesentatum, quod posito arcu $FT = t$, sit $= \frac{t}{\sqrt{a}}$: ob homogeneitatem enim conuenit tempus per functionem dimidia dimensionis linearum exprimi. Hoc praeterea tempo-

temporis momento existat corpus in loco M , sitque spatium $MC = s$; atque hoc in loco celeritatem habeat versus dextram tantam, quanta debetur altitudini v . Hoc ergo in loco a priori vi versus dextram sollicitabitur, haecque vis, cum proportionalis sit spatio MC , ponatur $= \frac{s}{b}$ existente vi grauitatis $= 1$.

§. 12. Ab altera igitur vi a tempore pendente pariter vrgebitur ad dextram, sinui PT proportionaliter, si quidem sinus arcus FT sit affirmatiuus. Ponamus arcus $FT = t$ sinum $PT = y$, atque vim corpus versus dextram pellentem esse $= \frac{y}{g}$. Cum igitur corpus in M sollicitetur ab his viribus coniunctim in eandem plagam puta versus dextram vi $= \frac{s}{b} + \frac{y}{g}$; acceleratio, dum spatii elementum Mm absoluit, innotescet. Quoniam vero est $Mm = -ds$ prodibit per legem accelerationis $dv = -ds (\frac{s}{b} + \frac{y}{g})$, cuius aequationis integratio determinanda erit ex initio motus, scilicet ex loco, quem tum corpus occupauit a celeritate, quam eo tempore habuit.

§. 13. Praeter hanc vero aequationem natura circuli suppeditat istam $dt = \frac{ady}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ ex qua fit $t = a \text{ fin. } \frac{y}{a}$ denotante $A \text{ fin. } \frac{y}{a}$ arcum cuius sinus est $\frac{y}{a}$ in circulo semidiametrum habente $= 1$: similique modo inuerse erit $y = a \text{ fin. } A \frac{t}{a}$: denotante pariter $\text{fin. } A \frac{t}{a}$, in circulo cuius radius est 1 , sinum arcus $\frac{t}{a}$. Si ergo fiat $t = c$, erit $y = a$ et si $t = 2c$ fiet $y = 0$; ac generaliter denotante i numerum quemcunque integrum, si fuerit $t = 2ic$ erit $y = 0$; si $t = (4i + 1)c$ erit $y = a$; at si $t = (4i - 1)c$; fiet $y = -a$. Hinc igitur pro lubitu t loco y , vel y loco t in computum introducetur.

§. 14. Quia vero quatuor habentur incognitae ad problema resoluendum tribus opus erit aequationibus; quarum duae quidem iam sunt exhibitae. Tertia vero aequatio ex consideratione temporis est deducenda. Cum enim totum tempus sit $= \frac{t}{\sqrt{a}}$, erit tempusculum, quo elementum Mm absoluitur $= \frac{dt}{\sqrt{a}}$, idem vero tempus habetur $= -\frac{ds}{\sqrt{v}}$ vnde ista emerget aequatio $\sqrt{v} = -\frac{ds\sqrt{a}}{dt}$. Quamobrem cum habeantur hae quatuor variables s , t , y et v , ope trium aequationum $dv = -ds(\frac{s}{b} + \frac{y}{g})$; $dt = \frac{ady}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$ et $\sqrt{v} = -\frac{ds\sqrt{a}}{dt}$, duae quaecunque poterunt eliminari, atque aequatio inter duas reliquas elici.

§. 15. Motus autem oscillatorius commodissime cognoscetur, si ad datum quoduis temporis momentum assignari poterit in spatio AB locus, in quo tum corpus versabitur. Hanc ob rem conueniet variables y et v eliminari atque aequationem inter s et t inueniri. Cum igitur per duas posteriores aequationes sit $y = a \sin. A \frac{t}{a}$ et $v = \frac{a ds^2}{dt^2}$, si elementum temporis constans ponatur erit $dv = \frac{2a ds dds}{dt^2}$; qui valores in prima aequatione $dv = -ds(\frac{s}{b} + \frac{y}{g})$ substituti praebebunt hanc aequationem inter s et t : $\frac{2a ds dds}{dt^2} = -ds(\frac{s}{b} + \frac{a}{g} \sin. A \frac{t}{a})$ seu $2a dds + \frac{s dt^2}{b} + \frac{a dt^2}{g} \sin. A \frac{t}{a} = 0$: quam ergo bis integrari oportet, vt aequatio finita inter s et t obtineatur.

§. 16. Antequam integrationem huius aequationis suscipiam, quippe quae non parum est difficilis, casus nonnullos singulares perpendisse iuuabit. Ac primum quidem euanescat penitus vis illa a momento temporis pendens, ita vt corpus a sola vi $\frac{s}{b}$ a spatio MC pendente sollicitetur.

tetur. Hoc posito erit $g = \infty$, atque haec habebitur aequatio $2abdds + sdt^2 = 0$, quae per ds multiplicata et integrata dat $abds^2 + \frac{s^2dt^2}{2} = \frac{Cds^2}{2}$; seu $\frac{-ds\sqrt{2}}{dt} = \sqrt{\frac{C-s^2}{2b}}$, ex qua aequatione valor constantis C est determinandus ita, ut celeritas initialis congruat cum proposita. Ponamus celeritatem in C deberi altitudini b , fiet $C = 2bb$, atque ista emerget aequatio $\frac{-ds\sqrt{2ab}}{\sqrt{2 \cdot b - s^2}} = dt$.

§. 17. Aequatio haec vltima integrari potest concessa circuli quadratura, fitque $t = C - \sqrt{2ab} \cdot A \sin. \frac{s}{\sqrt{2bb}}$. Quoniam autem est $\sqrt{v} = \sqrt{\frac{2bb - s^2}{2b}}$; motus initium, quo celeritas evanescebat, incidit in punctum A existentē $CA = \sqrt{2bb}$: ex quo definitur constans $C = \sqrt{2ab} \cdot A \sin. \pi$. Quocirca tempus per spatium AM seu t erit $= \sqrt{2ab} \cdot A \cos. \frac{s}{\sqrt{2bb}}$: quare cum tempus positum sit $= \frac{t}{\sqrt{a}}$, habebitur ipsum tempus $\frac{t}{\sqrt{a}} = \sqrt{2b} \cdot A \cos. \frac{s}{\sqrt{2bb}}$. In punctum itaque medium C corpus ex A pertinget tempore $= \sqrt{2b} \cdot A \cos. 0 = \frac{\pi\sqrt{2b}}{2} = \frac{\pi\sqrt{b}}{\sqrt{2}}$ denotande π peripheriam circuli cuius diameter $= 1$. Vnde non solum natura harum oscillationum sed etiam isochronismus perspicitur.

§. 18. Ponamus nunc vim istam spatio MC proportionalem evanescere, alteramque a tempore pendentem solum corpus virgere; cui conditioni satisfiet ponendo $b = \infty$, quo facto ista emerget aequatio $2gdds + dt^2 \sin. A \frac{t}{a} = 0$. Ad quam integrandam notari iuvabit esse diff. sin. $A \frac{t}{a} = \frac{dt}{a} \cos. A \frac{t}{a}$; atque diff. cos. $A \frac{t}{a} = -\frac{dt}{a} \sin. A \frac{t}{a}$. Integratione ergo prima vice instituta prodibit $2gds - a dt \cos. A \frac{t}{a} = Cdt$: vnde fit $\frac{ds}{dt} = \frac{C + a \cos. A \frac{t}{a}}{2g}$ atque ce-

leritas

celeritas in $M = \sqrt{v} = \frac{-ds\sqrt{a}}{dt} = \frac{-Ca - a^2 \cos. A \frac{t}{a}}{2g\sqrt{a}}$. Ponatur initio temporis celeritas fuisse versus dextram et debita esse altitudini b ; erit $2g\sqrt{a}b = -Ca - a^2$ ideoque $Ca = -a^2 - 2g\sqrt{a}b$, ex quo fiet post tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$ celeritas in eandem plagam $\sqrt{v} = \sqrt{b} \frac{+a\sqrt{a} \sin. v. A \frac{t}{a}}{2g}$.

§. 19. Cum igitur sinus versus cuiusque arcus semper sit affirmatiuus, intelligitur celeritatem \sqrt{v} semper fore affirmatiuam seu versus dextram esse directam, si quidem initio temporis celeritas \sqrt{b} in eandem plagam tendat. Hoc ergo casu corpus per rectam AB in infinitum progredietur, motu quidem inaequabili; elapsis enim temporibus $\frac{0}{\sqrt{a}}$; $\frac{4c}{\sqrt{a}}$; $\frac{8c}{\sqrt{a}}$; $\frac{12c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{4ic}{\sqrt{a}}$ celeritas corporis a sinistra ad dextram erit $= \sqrt{b}$; elapsis autem temporibus $\frac{c}{\sqrt{a}}$; $\frac{3c}{\sqrt{a}}$; $\frac{5c}{\sqrt{a}}$; et generatim $\frac{(2i+1)c}{\sqrt{a}}$ celeritas erit $= \sqrt{b} + \frac{a\sqrt{a}}{2g}$; temporibus denique $\frac{2c}{\sqrt{a}}$; $\frac{6c}{\sqrt{a}}$; $\frac{10c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{2(2i+1)c}{\sqrt{a}}$ celeritas erit maxima et $= \sqrt{b} + \frac{a\sqrt{a}}{g}$. Quamobrem nisi celeritas initialis \sqrt{b} sit negatiua seu versus finistram tendat, motus non dabitur reciprocus, nullaeque absoluentur oscillationes.

§. 20. Vt igitur motus oriatur oscillatorius, quo corpus perpetuo in eodem interuallo contineatur, in quo alternis vicibus eundo et redeundo moueatur, necesse est ut celeritas aequae saepe fiat negatiua ac affirmatiua: id quod eueniet, si corpus initio versus finistram moueatur celeritate $= \frac{a\sqrt{a}}{2g}$: seu ponendo $\sqrt{b} = \frac{-a\sqrt{a}}{2g}$. Hac autem hypothesi facta prodibit ad datum tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$ celeritas ver-

fus dextram seu $Vv = \frac{-a\sqrt{a} \cos. A \frac{t}{a}}{2g}$. Temporibus igitur $\frac{0}{\sqrt{a}}$; $\frac{2c}{\sqrt{a}}$; $\frac{4c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{4ic}{\sqrt{a}}$, celeritas erit $= \frac{-a\sqrt{a}}{2g}$; temporibus $\frac{c}{\sqrt{a}}$; $\frac{3c}{\sqrt{a}}$; $\frac{5c}{\sqrt{a}}$ et generaliter tempore $\frac{(4i+1)c}{\sqrt{a}}$; itemque temporibus $\frac{2c}{\sqrt{a}}$; $\frac{6c}{\sqrt{a}}$ et generaliter tempore $\frac{(4i+2)c}{\sqrt{a}}$ celeritas erit $= 0$. Temporibus denique $\frac{4c}{\sqrt{a}}$; $\frac{8c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{(4i+4)c}{\sqrt{a}}$ celeritas erit $= \frac{a\sqrt{a}}{2g}$.

§. 21. Cum igitur casu quo oscillationes regulares absoluntur, sit $Vv = \frac{-a\sqrt{a}}{2g} \cos. A \frac{t}{a}$; erit $\frac{ds}{dt} = \frac{a}{2g} \cos. \frac{t}{a}$, seu $2gds =adt \cos. A \frac{t}{a}$, cuius integrale est $2gs = C + aa \sin. A \frac{t}{a}$. Ponatur constans $C = 0$, quo spatium s quod a medio puncto C computatur, tam crebro fiat negativum quam affirmativum, erit $s = \frac{aa}{2g} \sin. A \frac{t}{a}$. Temporibus ergo $\frac{0}{\sqrt{a}}$; $\frac{2c}{\sqrt{a}}$; $\frac{4c}{\sqrt{a}}$ et $\frac{2ic}{\sqrt{a}}$ corpus existet in puncto C . Temporibus vero $\frac{c}{\sqrt{a}}$; $\frac{5c}{\sqrt{a}}$, et generaliter $\frac{(4i+1)c}{\sqrt{a}}$ corpus versabitur in A , existente $CA = \frac{aa}{2g}$. Temporibus autem $\frac{3c}{\sqrt{a}}$; $\frac{7c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{(4i+3)c}{\sqrt{a}}$ corpus situm erit in B , existente $CB = \frac{aa}{2g}$. Tempus denique, quo corpus vel ex A in B vel vicissim ex B in A pertingit erit $= \frac{2c}{\sqrt{a}} = \pi \sqrt{a}$ denotante $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam.

§. 22. His igitur casibus evolutis iam satis intelligere licet, quomodo in integratione aequationis differentio differentialis $2adds + \frac{sd1^2}{b} + \frac{adt^2}{g} \sin. A \frac{t}{a} = 0$ versari oporteat; ex qua aequatione derivandus est motus, corpus si ab utraque vi coniunctim cicatur. Ac primo quidem tentemus integrationem eo modo, quo in integrationibus

aequationum differentialium cuiuscunque gradus, in quibus altera variables plus vna dimensione non habet, vti soleo. Qui modus, tametsi ad constructionem aequationis propositae manuducet, tamen vehementer implicabitur formulis integralibus, ita vt alia integrandi methodus particularis quidem illi sit anteferenda.

§. 23. Methodus autem mea prior ita se habet: reiectis omnibus terminis, in quibus illa variabilis, quae plures vna dimensiones nusquam habet, non inest, residua aequatio integretur. Ex nostra igitur aequatione emerget ista $2adds + \frac{sd\dot{t}^2}{b} = 0$, quae, cum sit ea ipsa, quam primo casu habuimus, bis integrata dabit $t = \sqrt{2ab} \cdot A \cos. \frac{s}{C}$ ex qua oritur $s = C \cos. A \cdot \frac{t}{\sqrt{2ab}}$. Quo ipsius s valore inuento regula mea porro postulat, vt s productio ex hoc valore in nouam variabilem ponatur aequalis: fit itaque $s = u \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}}$, erit $ds = du \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{u d\dot{t}}{\sqrt{2ab}} \sin. A \frac{t}{\sqrt{2ab}}$; atque $d\dot{s} = d\dot{u} \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{u d\dot{t} du}{\sqrt{2ab}} \sin. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{u d\dot{t}^2}{2ab} \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}}$.

§. 24. Si iam isti valores in aequatione proposita $2adds + \frac{sd\dot{t}^2}{b} + \frac{ad\dot{t}^2}{g} \sin. A \frac{t}{a} = 0$ substituantur, prodibit ista aequatio $2ad\dot{u} \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{4ad\dot{u}d\dot{t}}{\sqrt{2ab}} \sin. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{ad\dot{t}^2}{g} \sin. A \frac{t}{a} = 0$. Cum nunc habeatur aequatio, in qua altera variabilis u ipsa non inest, ponatur $du = p dt$, atque aequatio proposita abibit in hanc differentialem primi gradus $2adp \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{4ap\dot{d}t}{\sqrt{2ab}} \sin. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{ad\dot{t}}{g} \sin. A \frac{t}{a} = 0$: quae vltius transit in hanc $dp - \frac{2p\dot{d}t}{\sqrt{2ab}} \tan. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} = -\frac{dt}{2g} \cdot \frac{\sin. A \frac{t}{a}}{\cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}}}$ quae ad integrationem magis est accommodata.

§. 25.

§. 25. Cum nunc fit $\frac{-dt}{\sqrt{2ab}} \sin. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} = \text{diff.} \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}}$, aequatio vltima transformabitur in hanc $d p + 2 p \text{ diff.} \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} = \frac{-dt}{2g} \frac{\sin. A \frac{t}{\sqrt{2ab}}}{\cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}}}$ quae multiplicata per $\cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}}$ fit integrabilis, atque integralis aequatio erit haec $p \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} = C - \frac{1}{2g} \int dt \sin. A \frac{t}{\sqrt{2ab}}$ vel si constans in ipso integrali inuolvatur, erit $p = \frac{-1}{2g \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}}} \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} \int dt \sin. A \frac{t}{\sqrt{2ab}}$. Cum igitur per t detur p , ex eo reperietur $u = \int p dt$ ac denique $s = \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} \cdot \int p dt$.

§. 26. Quantumvis autem non solum prima integratio, sed etiam altera difficiles videantur, tamen utraque re bene perpenſa satis commode absolui potest. Transmutatione enim integralium fit $\int dt \sin. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} = \sqrt{2ab} \sin. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} \sin. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{\sqrt{2ab}}{a} \int dt \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} \sin. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} = \sqrt{2ab} \sin. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} \sin. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} + 2b \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{2b}{a} \int dt \sin. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}}$, quae posterior formula integralis cum propositae sit similis, habebitur $\int dt \sin. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} = \frac{a \sqrt{2ab} \sin. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} \sin. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} + 2ab \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}}}{a - 2b}$

$$+ C \text{ vnde fiet } p = \frac{C}{\cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} \cdot \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}}} - \frac{a \sqrt{2ab} \sin. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} \cdot \int A \frac{t}{\sqrt{2ab}} - 2ab \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}}}{2g(a - 2b) \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} \cdot \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}}}$$

S 2

ex

ex qua aequatione valor ipsius p per quantitates finitas habetur expressus.

§. 27. Quoniam porro est $u = \int p dt$, multiplicetur valor ipsius p inuentus per dt , quo facto singula membra deprehendentur integrabilia; prodibit autem $u = D + C \sin. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{a^2 b \sin. A \frac{t}{a}}{g(a-2b) \cos. \frac{t}{\sqrt{2ab}}}$. Quare cum sit $s = u \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}}$ orietur tandem ista aequatio $s = D \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} + C \sin. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{a^2 b \sin. A \frac{t}{a}}{g(a-2b)}$, cuius quantitates constantes ex circumstantiis casus propositi debent definiri. Quod, quo facilius fieri queat, celeritas Vv est definienda, quae cum sit $= \frac{ds \sqrt{a}}{dt}$, erit $Vv = \frac{+D}{\sqrt{2b}} \sin. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{C}{\sqrt{2b}} \cos. A \frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{ab \sqrt{a} \cos. \frac{t}{a}}{g(a-2b)}$. Ex his ergo aequationibus ad datum

quodvis tempus cum locus corporis in recta AB tum etiam celeritas, qua mouebitur, poterit determinari.

§. 28. Casus quo $2b = a$ seu $\sqrt{2ab} = a$, peculiari indiget integratione, neque praecedens ad hunc casum patet. Erit enim $\int dt \sin. A \frac{t}{a} \cos. A \frac{t}{a} = \frac{1}{2} a \sin. A \frac{t}{a} \cdot \sin. A \frac{t}{a}$

$+ C$. ideoque $p = \frac{C}{\cos. A \frac{t}{a} \cos. A \frac{t}{a}} - \frac{a \sin. A \frac{t}{a} \sin. A \frac{t}{a}}{4g \cos. A \frac{t}{a} \cos. A \frac{t}{a}}$.

Vnde fit $\int p dt = u = \frac{C \sin. A \frac{t}{a}}{\cos. A \frac{t}{a}} - \frac{a^2 \sin. A \frac{t}{a}}{4g \cos. A \frac{t}{a}} + \frac{at}{4g} + D$.

Consequenter habebitur $s = D \cos. A \frac{t}{a} + C \sin. A \frac{t}{a} + \frac{at}{4g} \cos. A \frac{t}{a}$. mutata constante C. Hinc itaque orietur $Vv = \frac{ds \sqrt{a}}{dt} = \frac{D}{\sqrt{a}} \sin. A \frac{t}{a} - \frac{C}{\sqrt{a}} \cos. A \frac{t}{a} - \frac{a \sqrt{a}}{4g} \cos. A \frac{t}{a} + \frac{t \sqrt{a}}{4g} \sin. A \frac{t}{a}$.

$A \frac{t}{a}$. Ex quo istae oscillationes post tempus infinitum in infinitum excrecent ac per spatium infinite magnum excurrent.

§. 29. Cum istae integrationes penitus sint insolitae, ac propterea non cuius diiudicatu faciles, aliam methodum particularem exponam, cuius ope eadem aequationes integrales erui queant. Cum aequatio proposita esset $2add s + \frac{sd t^2}{b} + \frac{adt^2}{g}$ fin. $A \frac{t}{a} = 0$, ea finem arcus $\frac{t}{a}$ per seriem exprimendo transibit in hanc $2add s + \frac{sd t^2}{b} + \frac{adt^2}{g}$ $(t - \frac{t^3}{1 \cdot 2 \cdot 2a^2} + \frac{t^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5a^4} - \frac{t^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6a^6} + \text{etc.}) = 0$. Affirmatur iam pro s iste valor indefinitus, $s = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3 + \epsilon t^4 + \zeta t^5 + \eta t^6 + \text{etc.}$ erit substitutione facta ut sequitur:

$$\frac{2add s}{dt^2} = 2 \cdot 1 \cdot 2 \gamma a + 2 \cdot 2 \cdot 3 \delta a t + 2 \cdot 3 \cdot 4 \epsilon a t^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5 \zeta a t^3 + 2 \cdot 5 \cdot 6 \eta a t^4 + \text{etc.}$$

$$\frac{s}{b} = \frac{\alpha}{b} + \frac{\beta t}{b} + \frac{\gamma t^2}{b} + \frac{\delta t^3}{b} + \frac{\epsilon t^4}{b} + \text{etc.}$$

$$\frac{a}{g} \text{ fin. } A \frac{t}{a} = \frac{t}{g} - \frac{t^3}{1 \cdot 2 \cdot 2a^2 g} + \text{etc.}$$

§. 30. Si nunc harum trium serierum termini singuli homogenei ponantur $= 0$, coefficientes assumti seriei, cui s aequale est positum, ita definientur ut sit:

$$\gamma = \frac{-\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 2ab}; \quad \delta = \frac{-b - 6g}{2 \cdot 3g \cdot 2ab}; \quad \epsilon = \frac{\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2a^2b^2}$$

$$\zeta = \frac{2b + a + \frac{6ag}{b}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2a^3gb}; \quad \eta = \frac{-\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2a^5b^2}$$

$$\theta = -b - \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4b} - \frac{6a^2g}{4bb}; \quad 2 = \frac{\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2a^6b^3}$$

$$\kappa = b + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4b} + \frac{a^3}{8bb} + \frac{6a^3g}{8b^3}; \quad \lambda = \frac{-\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2a^7bg}$$

$$\mu = -b - \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4b} - \frac{a^3}{8bb} - \frac{a^4}{16b^3} - \frac{6a^4g}{16b^4}; \quad \text{etc.}$$

vnde reliquorum coefficientium valores cognosci poterunt.

§. 31 Coefficientes quidem potestatum parium ipsius t satis regulariter progrediuntur, at potestatum imparium exponentes ad has formas rediguntur.

$$\begin{aligned} \xi &= \xi; & \delta &= \frac{-a+2b}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2ag(a-2b)} - \frac{\xi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2ab} \\ \zeta &= \frac{a^2-4b^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4a^3bg(a-2b)} + \frac{\xi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4a^2b^2} \\ \theta &= \frac{-a^3+8b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 5a^4b^2g(a-2b)} - \frac{\xi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 5a^3b^3} \\ \kappa &= \frac{a^4-16b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 6a^5b^3g(a-2b)} + \frac{\xi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 6a^4b^4} \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Quare si series $a + \xi t + \gamma t^2 + \text{etc.}$ in series simplices regulares resoluatur, prodibit $s =$

$$\begin{aligned} &a \left(1 - \frac{t^2}{1 \cdot 2 \cdot 2ab} + \frac{t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4a^2b^2} - \frac{t^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5a^3b^3} + \text{etc.} \right) \\ &+ \xi \sqrt{2ab} \left(\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2ab\sqrt{2ab}} + \frac{t^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4a^2b^3\sqrt{2ab}} - \text{etc.} \right) \\ &+ \frac{ab\sqrt{2ab}}{g(a-2b)} \left(\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2ab\sqrt{2ab}} + \frac{t^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4a^2b^3\sqrt{2ab}} - \text{etc.} \right) \\ &- \frac{a^2b}{g(a-2b)} \left(\frac{t}{a} - \frac{t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a^3} + \frac{t^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^5} - \text{etc.} \right) \end{aligned}$$

quae series cum singulae sint summabiles, obtinebitur loco s sequens valor finitus, $s = a \cos. A \cdot \frac{t}{\sqrt{2ab}} + \xi \sqrt{2ab} \sin. A \cdot \frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{ab\sqrt{2ab}}{g(a-2b)} \sin. A \cdot \frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{a^2b}{g(a-2b)} \sin. A \cdot \frac{t}{a}$. quae aequatio si constantes a et ξ aliquantillum mutantur plane congruit cum ea, quae supra §. 27. ope integrationis est eruta.

§. 32. Retineamus aequationes supra inuentas $s = D \cos. A \cdot \frac{t}{\sqrt{2ab}} + C \sin. A \cdot \frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{a^2b}{g(a-2b)} \sin. A \cdot \frac{t}{a}$ et $Vv = \frac{D}{\sqrt{2b}} \sin. A \cdot \frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{C}{\sqrt{2b}} \cos. A \cdot \frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{ab\sqrt{a}}{g(a-2b)} \cos. A \cdot \frac{t}{a}$ in quibus casus ambo speciales supra tractati egregie continentur. Ponamus nunc autem initio quo $t = 0$, corpus quiescente in C , ita vt tum fuerit tam $s = 0$ quam $Vv = 0$. Fiet itaque $D = 0$; et $C = \frac{ab\sqrt{2ab}}{g(a-2b)}$, quibus valoribus

loribus substitutis erit $s = \frac{ab\sqrt{2ab}}{g(a-2b)} \sin A \frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{a^2b}{g(a-2b)} \sin A \frac{t}{a}$
 atque $Vv = \frac{ab\sqrt{a}}{g(a-2b)} \left(\cos A \frac{t}{a} - \cos A \frac{t}{\sqrt{2ab}} \right)$, ex quibus
 aequationibus ad datum tempus tum locus corporis, tum
 eius celeritas innotescunt.

§. 33. Vt naturam harum oscillationum penitus in-
 spiciamus, varias relationes quantitatum a et b contem-
 plumur, quibus arcus $\frac{t}{a}$ et $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ commensurabiles reddan-
 tur. Ac primo quidem incipiamus a maximo ipsius b
 valore, quo casu vis a spatio s pendens evanescit. Cum
 igitur hoc casu sit $\sin A \frac{t}{\sqrt{2ab}} = \frac{t}{\sqrt{2ab}}$, fiet $s = \frac{at}{2g} +$
 $\frac{a^2}{2g} \sin A \frac{t}{a}$; atque $Vv = \frac{t-a\sqrt{a}}{2g} \int \text{vers. } A \frac{t}{a}$. Ergo
 si tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$ erit spatium s ac velocitas Vv

$\frac{0c}{\sqrt{a}}$	$\frac{0}{-ac+aa}$	$\frac{0}{a\sqrt{a}}$
$\frac{\sqrt{a}}{c}$	$\frac{2g}{-2ic}$	$\frac{2g}{2a\sqrt{a}}$
$\frac{\sqrt{a}}{2c}$	$\frac{2g}{-3ac-aa}$	$\frac{2g}{a\sqrt{a}}$
$\frac{\sqrt{a}}{3c}$	$\frac{2g}{-4ac}$	$\frac{2g}{2g}$
$\frac{\sqrt{a}}{4c}$	$\frac{2g}{-5ac+aa}$	$\frac{0}{a\sqrt{a}}$
$\frac{\sqrt{a}}{5c}$	$\frac{2g}{2g}$	$\frac{a\sqrt{a}}{2g}$

§. 34. Hoc igitur casu, quo cum b ponimus infini-
 tum, tum corpus initio in C quiescere assumimus, cor-
 pus ex C versus dextram CB continuo ultra progredie-
 tur, motu alternatim accelerato et retardato. Quanquam
 autem hoc casu oscillationes non contingunt, tamen ab
 eo examen ordiri visum est, vt nexus inter motus hoc
 modo oriundos, dum b pedetentim minorem valorem
 consequitur, clarius pateat. Ponamus $b = \frac{na}{2}$ vt sit V
 $2ab = na$; vnde fiet $s = \frac{n^2a^2}{2g(nn-1)} \left(\sin A \frac{t}{a} - n \sin A \frac{t}{na} \right)$
 atque $Vv = \frac{n^2a\sqrt{a}}{2g(nn-1)} \left(\cos A \frac{t}{na} - \cos A \frac{t}{a} \right)$: in quibus
 ex-

expressionibus arcuum $\frac{t}{a}$ et $\frac{t}{na}$ sinus et cosinus inter se comparari poterunt, quoties n fuerit numerus rationalis.

§. 35. A valore ipsius n , qui priore casu erat infinitus, descendamus ad valores continuo minores, quoad perveniatur ad casum $n=1$; quo per peculiarem aequationem fit $s = \frac{-a^2}{+g}$ sin. $A \frac{t}{a} + \frac{at}{+g}$ cos. $A \frac{t}{a}$; ac $\sqrt{v} = \frac{t\sqrt{a}}{+g}$ sin. $A \frac{t}{a}$, quo casu oscillationes tandem in infinitum excrefcunt: motus autem ita se habebit.

Si tempus = $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit spatium s	ac celeritas \sqrt{v}
$\frac{+c}{\sqrt{a}}$	0	0
$\frac{+c}{\sqrt{a}}$	$-\frac{2a}{+g}$	$+\frac{c\sqrt{a}}{+g}$
$\frac{+c}{\sqrt{a}}$	$-\frac{2ac}{+g}$	0
$\frac{+c}{\sqrt{a}}$	$+\frac{4g}{+g}$	$-\frac{3c\sqrt{a}}{+g}$
$\frac{+c}{\sqrt{a}}$	$+\frac{4g}{+g}$	0
$\frac{+c}{\sqrt{a}}$	$-\frac{4ac}{+g}$	0
$\frac{+c}{\sqrt{a}}$	$+\frac{4g}{+g}$	$+\frac{3c\sqrt{a}}{+g}$
$\frac{+c}{\sqrt{a}}$	$-\frac{4ac}{+g}$	0

§. 36. Euolutis igitur casibus, quasi extremis, scilicet $n=\infty$ et $n=1$. videamus quantum casus intermedii, quibus pro n successive numeros integros ponemus, ab extremis discrepent. Ponamus itaque $n=2$, seu $b=2a$: erit $s = \frac{2a^2}{+g}$ (sin. $A \frac{t}{a} - 2$ sin. $A \frac{t}{2a}$) atque $\sqrt{v} = \frac{2c\sqrt{a}}{+g}$ (cos. $A \frac{t}{2a} - \cos. A \frac{t}{a}$). Quoties igitur fuerit $t=4ic$, erit $s=0$; at celeritas evanescet, quoties fit $t=\frac{sic}{2}$, designante i numerum integrum quemcunque. Motus ergo se habebit, vt ex hac tabella perspicietur.

Si

Si tempus $= \frac{t}{\sqrt{a}}$	erit spatium s	ac celeritas \sqrt{v}
et $t = \frac{0c}{3}$	\circ	\circ
$t = \frac{4c}{3}$	$\frac{-2a^2}{3g} \text{ fin. } A \frac{2c}{3a}$	$\frac{+4a\sqrt{a}}{3g} \cos A \frac{2c}{3a}$
$t = \frac{8c}{3}$	$\frac{-6a^2}{3g} \text{ fin. } A \frac{2c}{3a}$	\circ
$t = \frac{12c}{3}$	\circ	$\frac{-4a\sqrt{a}}{3g}$
$t = \frac{16c}{3}$	$\frac{+6a^2}{3g} \text{ fin. } A \frac{2c}{3a}$	\circ
$t = \frac{20c}{3}$	$\frac{+2a^2}{3g} \text{ fin. } A \frac{2c}{3a}$	$\frac{+4a\sqrt{a}}{3g} \cos A \frac{2c}{3a}$
$t = \frac{24c}{3}$	\circ	\circ

§. 37. Eadem igitur motus revolutiones redeunt elapso tempore $= \frac{2c}{\sqrt{a}}$, seu bis percurſa peripheria circuli; intereaque tres oſcillationes abſoluuntur, quarum media fit per ſpatium duplo maius quam ceterae. Simili modo progrediendo patebit, ſi ponatur $n=3$, eaſdem periodos fore redituras poſt tempus $\frac{12c}{\sqrt{a}}$, ſeu peripheria circuli ter conſecta: atque ita porro, donec ſi $n=\infty$, periodorum nulla fit reuolutio, atque corpus in eandem plagam perpetuo progredi pergit. Namque ſi $n=3$, celeritas \sqrt{v} toties euaneſcit, quoties euenit $t=3ic$: ac ſi $n=4$, celeritas corporis euaneſcet partim caſibus quibus $t=\frac{16ic}{3}$ partim quibus eſt $t=\frac{16ic}{5}$. Poſito ergo $t=\frac{16ic}{15}$, ſi loco i ſucceſſiue omnes numeri integri ſubſtituantur, celeritas corporis deprehendetur nulla caſibus quibus i eſt,

0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 25 etc.
different: 3, 2, 1, 3, 1, 2, 3, 3, 2, 1, 3, 1,
poſt tempus adeo $16c$ eadem periodus repetetur, ſepties-
que vna periodo celeritas corporis erit nulla, totidemque
vna periodus continebit inaequales oſcillationes: ſi quidem

vna oscillatio sumatur inter duos terminos, quibus celeritas est $= 0$.

§. 38. Magis fient hae oscillationes regulares, si fuerit $n < 1$ atque $\frac{a}{n}$ numerus integer. Ponamus itaque esse $b = \frac{a}{2n^2}$ vt fit $\sqrt{2ab} = \frac{a}{n}$, eritque $s = \frac{a^2}{2g(nn-1)} \left(\frac{1}{n} \sin. A. \frac{nt}{a} - \sin. A. \frac{t}{a} \right)$ atque $\sqrt{v} = \frac{a\sqrt{a}}{2g(n^2-1)} \left(\cos. A. \frac{t}{a} - \cos. A. \frac{nt}{a} \right)$. Toties igitur celeritas corporis euanescet, quoties fuerit $t = \frac{4ic}{n+1}$. In idem autem punctum C quo $s = 0$ corpus non recidet, nisi fit $t = 2ic$. At si sumatur $t = \frac{4ic}{n-1}$ fiet $s = \frac{-a^2}{2gn(n+1)} \sin. A. \frac{t}{a}$, sin autem capiatur $t = \frac{4ic}{n+1}$, fiet $s = \frac{-a^2}{2gn(n-1)} \sin. A. \frac{t}{a}$. Ex his ergo formulis ponendo successine loco n numeros 2, 3, 4, 5, etc. natae sunt sequentes tabellae, ex quibus motus oscillatorius corporis duplici vi sollicitati cognosci poterit.

Sit $n = 2$ seu $b = \frac{a}{8}$

Ad tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit spatium s	et celeritas \sqrt{v}
si $t = 0c$	0	0
si $t = c$	$-\frac{aa}{6g}$	$+\frac{a\sqrt{a}}{6g}$
si $t = \frac{4}{3}c$	$-\frac{aa}{4g} \sin. A. \frac{2c}{3a}$	0
si $t = 2c$	0	$-\frac{a\sqrt{a}}{3g}$
si $t = \frac{8}{3}c$	$+\frac{aa}{4g} \sin. A. \frac{2c}{3a}$	0
si $t = 3c$	$+\frac{aa}{6g}$	$+\frac{a\sqrt{a}}{6g}$
si $t = 4c$	0	0

Sit

Sit $n = 3$ seu $b = \frac{a}{18}$.

Ad tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit spatium s	et celeritas $V v$
fi $t = 0 c$	0	0
fi $t = c$	$-\frac{aa}{12g}$	0
fi $t = 2c$	0	0
fi $t = 3c$	$+\frac{aa}{12g}$	0
fi $t = 4c$	0	0

Sit $n = 4$, seu $b = \frac{a}{32}$.

Ad tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit spatium s	et celeritas $V v$
fi $t = 0$	0	0
fi $t = \frac{1}{3}c$	$-\frac{a^2}{24g}$ fin. A $\frac{4c}{5g}$	0
fi $t = c$	$-\frac{a^2}{30g}$	$-\frac{a\sqrt{a}}{30g}$
fi $t = \frac{4}{3}c$	$-\frac{a^2}{40g}$ fin. A $\frac{2c}{3g}$	0
fi $t = \frac{8}{3}c$	$-\frac{a^2}{24g}$ fin. A $\frac{2c}{5g}$	0
fi $t = 2c$	0	$-\frac{a\sqrt{a}}{15g}$
fi $t = \frac{7}{3}c$	$+\frac{a^2}{24g}$ fin. A $\frac{2c}{5g}$	0
fi $t = \frac{8}{3}c$	$+\frac{a^2}{40g}$ fin. A $\frac{2c}{3g}$	0
fi $t = 3c$	$+\frac{a^2}{30g}$	$-\frac{a\sqrt{a}}{30g}$
fi $t = \frac{10}{3}c$	$+\frac{a^2}{24g}$ fin. A $\frac{4c}{5g}$	0
fi $t = 4c$	0	0

Sit $n = 5$ seu $b = \frac{a}{50}$.

Ad tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit spatium s	et celeritas $V v$
fi $t = 0$	0	0
fi $t = \frac{2}{3}c$	$-\frac{aa}{40g}$ fin. A $\frac{2c}{3a}$	0
fi $t = c$	$-\frac{aa}{60g}$	0
fi $t = \frac{4}{3}c$	$-\frac{aa}{40g}$ fin. A $\frac{2c}{3a}$	0
fi $t = 2c$	0	0

T 2

fi t

$$\begin{array}{lcl}
 \text{fi } t = \frac{8}{3}c & \left| \begin{array}{l} + \frac{aa}{40g} \sin. A \frac{2c}{3a} \\ + \frac{aa}{60g} \end{array} \right| & \begin{array}{l} \circ \\ \circ \end{array} \\
 \text{fi } t = 3c & & \circ \\
 \text{fi } t = \frac{10}{3}c & \left| \begin{array}{l} + \frac{aa}{40g} \sin. A \frac{2c}{3a} \\ \circ \end{array} \right| & \begin{array}{l} \circ \\ \circ \end{array} \\
 \text{fi } t = 4c & & \circ
 \end{array}$$

§. 39. Inter hos casus omnes maxime notari mere-
tur is, quo erat $2b = a$: eo quod spatium, in quo
continetur quaeque oscillatio continuo augetur, ac tandem
in infinitum excrescit: qui effectus eo magis est admi-
randus, quod huic soli casui est proprius, atque a viri-
bus finitis oriatur. Ex hoc igitur casu, si quidem com-
mode ad praxin reuocari posset, inuentio perpetui mobi-
lis deriuari posse videtur: pendulum enim in cycloide os-
cillans iam ita est comparatum, vt impulsiones a graui-
tate oriundae versus situm aequilibrii, sint vt spatia per-
currenda. Quare si tali pendulo istiusmodi automaton ap-
plicetur, quod alteram vim a tempore pendentem pro-
ducat, vis oscillationes tantopere augentis portio tum ad
automati intensiorem renouandam, quoties opus est, tum
ad resistantiam et frictionem superandam impendi posset,
ita vt si oscillationes non increfant, tamen datae quan-
titalis perpetuo conseruentur.

§. 40. Si nunc in causam inquiramus, propter quam
solus iste casus oscillationes continuo adaugeat, aliam non
deprehendimus, nisi quod hoc casu tempus vnius oscilla-
tionis integrae ex vno itu vnoque reditu compositae,
quae producitur a sola actione vis a spatio s pendente,
aequale sit tempori, quod per totam circuli FDHE peri-
pheriam exprimitur. Si enim corpus a sola vi $\frac{s}{b}$ follici-
tetur, tempus vnius oscillationis integrae ex itu et reditu

con-

constantis erit $= 2\pi\sqrt{2b} = \frac{4c}{\pi}\sqrt{2b}$ ob $1:\pi = a:2c$.
 Tempus autem per totam circuli peripheriam expressum est
 $= \frac{4c}{\sqrt{a}}$; quare ut haec tempora sint aequalia, necesse est
 sit $2b=a$. qui est ipse casus memoratus.

§. 41. Hinc etiam natura discriminis, quod inter
 oscillationes reliquorum casuum obseruauimus, penitus in-
 spici potest. Pendet enim hoc discrimen partim a quan-
 titate litterae g , qua quidem nulla alia diuersitas oscillatio-
 nibus inducitur, nisi quod per eo maiora spatia fiant,
 quo minorem valorem habeat g , ceterum autem tam ra-
 tione motus quam temporis sui maneant similes. Partim
 autem differentia oscillationum, qua indoles ipsarum maxi-
 me immutatur, sita est in diuerso habitu litterarum a et b ,
 quo ipso ratio remporum oscillationum ab ambabus viri-
 bus seorsim oriundarum definitur. Est enim tempus vnus
 oscillationis sola agente vi $\frac{s}{b}$ ad tempus vnus oscillationis
 a sola vi $\frac{2}{g}$ ortae ut $\sqrt{2b}$ ad \sqrt{a} . Ex quo intelligitur,
 quo magis haec ratio a commensurabilitate recedat, eo
 magis oscillationes futuras esse irregulares.

